UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI NAPOLI FEDERICO II

Dottorato di Ricerca in Scienze Matematiche

Ciclo XXV

Prodotti di gruppi nilpotenti e supersolubili

Tesi di Dottorato

Tutor:
Chiar.mo Prof.
Francesco de Giovanni

Dottorando:
Antonio Auletta

Anno Accademico 2012/2013

Introduzione

Nel 1955, N. Itô provó che se un gruppo G è prodotto di due sottogruppi abeliani A e B, allora G è metabeliano. Da quel momento, i prodotti di gruppi sono stati oggetto di interesse per numerosi matematici; in particolare, si è cercato di studiare come le ipotesi sui sottogruppi A e B potessero influenzare la struttura del gruppo G.

In seguito, O.H.Kegel e H. Wielandt hanno generalizzato il precedente risultato nel caso finito, provando che se A e B sono nilpotenti, allora G è risolubile.

Un sottogruppo S di un gruppo $G = AB$ si dice fattorizzato se $A \cap B \leq S$ e $S = (A \cap S)(B \cap S)$. In generale, i sottogruppi di un gruppo fattorizzato non sono fattorizzati, per cui, per ogni sottogruppo S di un gruppo fattorizzato G, ha senso considerare l'intersezione dei sottogruppi fattorizzati di G contenenti S (che è ancora un sottogruppo fattorizzato); tale intersezione prende il nome di fattorizzatore del sottogruppo S di G. I fattorizzatori di un sottogruppo normale di un gruppo fattorizzato, godono di una notevole proprietà, sono infatti dotati di una tripla fattorizzazione. Con notevole frequenza, le proprietà di un gruppo fattorizzato $G = AB$ sono strettamente legate alla struttura dei fattorizzatori dei sottogruppi normali di G; pertanto, si giunge allo studio dei gruppi triplamente fattorizzati.

Nel 1965, O.H. Kegel provò che ogni gruppo finito triplamente fattorizzato $G = AB = AC = BC$, con A e B nilpotenti e C supersolubile, è supersolubile. Questo risultato è stato generalizzato, nel 1973, da F.G. Peterson: rimpiazzando l'ipotesi di supersolubilità con l'ipotesi che il sottogruppo C appartenga ad una assegnata formazione saturata $\mathfrak{F}$ contenente tutti i gruppi finiti nilpotenti, egli provò che il gruppo G è esso stesso un $\mathfrak{F}$-gruppo. Tuttavia, Peterson produsse anche un esempio in cui mostrò che un gruppo finito triplamente fattorizzato da un sottogruppo nilpotente e due sottogruppi supersolubile non è in generale supersolubile.

L'ostacolo principale, come spesso accade nello studio dei gruppi supersolubili, è il comportamento del sottogruppo derivato. Sebbene esistono gruppi non supersolubili che siano prodotto di due sottogruppi normali supersolubili, R. Baer provò che se G è un gruppo finito con derivato nilpotente, allora ogni famiglia di sottogruppi normali supersolubili genera un sottogruppo supersolubile. Applicando questa osservazione, è possibile dimostrare che i gruppi finiti con derivato nilpotente, triplamente fattorizzati mediante sottogruppi supersolubili, sono supersolubili.

La situazione è molto più complicata nel caso infinito, in quanto Y.P. Sysak ha costruito esempi di gruppi triplamente fattorizzati da sottogruppi abeliani che non sono neanche localmente supersolubili. D.J.S. Robinson e S. Stonehewer hanno dimostrato che i gruppi dotati di una tripla fattorizzazione abeliana verificano una condizione generalizzata di nilpotenza; infatti, in tali gruppi, ogni fattore principale è centrale. L'osservazione che, negli esempi di Sysak, ogni elemento non banale è dotato di infiniti coniugati, conduce allo studio dei gruppi FC-ipercentrali, in cui, per definizione, ogni immagine omomorfa non banale del gruppo contiene qualche elemento non banale dotato di un numero finito di coniugati.

I gruppi FC-ipercentrali triplamente fattorizzati da sottogruppi ipercentrali sono stati studiati nel 1995 da B. Amberg, S. Franciosi e F. de Giovanni ed in seguito, nel 1996, ancora da B. Amberg e da Y.P. Sysak, provando che tali gruppi sono ipercentrali.

Nell'ultimo capitolo della tesi, è stato provato che i gruppi FC-ipercentrali a fattori principali centrali sono ipercentrali. Tale lemma consente di dimostrare il principale risultato della tesi: ogni gruppo FC-ipercentrale dotato di una tripla fattorizzazione localmente supersolubile è localmente supersolubile, nell'ipotesi in cui il sottogruppo derivato sia nilpotente. Il teorema è preceduto da un importante lemma, che risulta esserne un caso particolare, in cui si dimostra che ogni gruppo FC-ipercentrale triplamente fattorizzato da due sottogruppi abeliani e da un sottogruppo normale localmente supersolubile è localmente supersolubile.

Indice

Capitolo 1

Prodotti di gruppi

1.1 Considerazioni generali

Un gruppo G è *prodotto* di due sottogruppi A e B se

$$G = AB = \{ab | a \in A, b \in B\}.$$

In questo caso, il gruppo si dirà *fattorizzato* da A e B.

Nel 1955, N. Itô provò un risultato sui gruppi fattorizzati da sottogruppi abeliani, tanto famoso quanto sorprendente per la dimostrazione basata su un calcolo di commutatori.

Teorema 1.1.1 (Itô) *Sia $G = AB$ un gruppo fattorizzato da due sottogruppi abeliani A e B. Allora G è metabeliano.*

DIMOSTRAZIONE. Siano a, a_1 elementi di A e b, b_1 elementi di B. Si pongano $b^{a_1} = a_2b_2$ e $a^{b_1} = b_3a_3$, con a_2, a_3 appartenenti ad A e b_2, b_3 appartenenti a B.

Allora risulta

$$[a,b]^{a_1 b_1} = [a,b^{a_1}]^{b_1} = [a,b_2]^{b_1} = [a^{b_1},b_2] = [a_3,b_2]$$

e

$$[a,b]^{b_1 a_1} = [a^{b_1},b]^{a_1} = [a_3,b]^{a_1} = [a_3,b^{a_1}] = [a_3,b_2].$$

Pertanto si ottiene che

$$[a,b]^{a_1 b_1} = [a,b]^{b_1 a_1}$$

e quindi i commutatori $[a,b]$ e $[a_1,b_1]$ permutano. Poichè il gruppo quoziente $G/[A,B]$ è abeliano, allora anche il derivato $G' = [A,B]$ è abeliano e quindi G è metabeliano. ■

A partire da questo risultato, in molti hanno studiato i gruppi fattorizzati, imponendo condizioni aggiuntive sui sottogruppi e studiando come tali ipotesi influenzano la struttura del gruppo.

O.H.Kegel e H. Wielandt hanno ottenuto una sorta di generalizzazione del precedente teorema, nel caso finito.

Teorema 1.1.2 (Kegel, Wielandt) *Si consideri il gruppo finito $G = AB$, prodotto di due sottogruppi nilpotenti A e B. Allora G è risolubile.*

1.2 Sottogruppi e quozienti di gruppi fattorizzati

Sia $G = AB$ un gruppo fattorizzato da due sottogruppi A e B. Si noti che ogni immagine omomorfa di un gruppo fattorizzato G è a sua volta fattorizzata, in quanto sussiste la seguente relazione:

$$\frac{G}{N} = \left(\frac{AN}{N}\right)\left(\frac{BN}{N}\right).$$

D'altro canto, un sottogruppo di un gruppo fattorizzato non è generalmente fattorizzato. Si ricordi che un sottogruppo S di un gruppo fattorizzato $G = AB$ si dice *fattorizzato* se $S = (A \cap S)(B \cap S)$ e $A \cap B \in S$. I sottogruppi fattorizzati godono della seguente utile proprietà.

Lemma 1.2.1 *Sia $G = AB$ un gruppo fattorizzato da due sottogruppi A e B. Se S è un sottogruppo fattorizzato di G, allora $S = AS \cap BS$.*

Sia S un sottogruppo di un gruppo fattorizzato $G = AB$. Si definisce *fattorizzatore* di S, e si indica con $X(S)$, l'intersezione dei sottogruppi fattorizzati di G contenenti S. La definizione è ben posta in quanto si verifica facilmente che l'intersezione di un'arbitraria famiglia di sottogruppi fattorizzati di un gruppo $G = AB$ è fattorizzata. Sia $G = AB$ un gruppo fattorizzato e sia N un sottogruppo normale di G. Allora il fattorizzatore $X(N)$ di N ha un'interessante tripla fattorizzazione, come dimostrato nel seguente lemma.

Lemma 1.2.2 *Sia $G = AB$ un gruppo fattorizzato dai suoi sottogruppi A e B e sia N un sottogruppo normale di G. Allora:*

- $X(N) = AN \cap BN$
- $X(N) = (A \cap X(N))(B \cap X(N)) = (B \cap AN)N = (A \cap BN)N$

DIMOSTRAZIONE. (i) I sottogruppi AN e BN sono fattorizzati perchè contengono rispettivamente A e B; pertanto, detto $X(N)$ il fattorizzatore di N, risulta che

$$X(N) \subseteq AN \cap BN.$$

Per provare l'altra inclusione, si osservi che comunque si consideri un sottogruppo fattorizzato S di G contenente N, risulta che

$$AN \cap BN \leq AS \cap BS = S.$$

Pertanto, $AN \cap BN$ è contenuto nell'intersezione $X(N)$ di tutti i sottogruppi fattorizzati di G contenenti N.

(ii) Per l'identità di Dedekind, risulta

$$X(N) = AN \cap BN = N(A \cap BN) = N(B \cap AN).$$

Inoltre, dalla (i), segue che

$$X(N) = (A \cap X(N))(B \cap X(N)) = (B \cap AN)(A \cap BN).$$

■

1.3 Gruppi triplamente fattorizzati

La struttura dei fattorizzatori dei sottogruppi normali dei gruppi fattorizzati conduce spesso allo studio dei gruppi triplamente fattorizzati della forma

$$G = AB = AK = BK,$$

con A e B sottogruppi di G e K sottogruppo normale di G.

Con il seguente teorema del 1965, O.H. Kegel ha particolarizzato il suo precedente risultato nel caso di gruppi con una tripla fattorizzazione.

Teorema 1.3.1 (Kegel) *Si consideri il gruppo finito*

$$G = AB = AK = BK$$

fattorizzato da due sottogruppi nilpotenti A e B e da un sottogruppo supersolubile K. Allora G è supersolubile.

Il risultato è stato generalizzato da F. de Giovanni e S. Franciosi. Si ricordi che si dice che un gruppo G ha *rango sezionale finito* se è privo di sezioni abeliane infinite che abbiano esponente primo.

Teorema 1.3.2 (Franciosi, de Giovanni, 1997) *Sia*

$$G = AB = AC = BC$$

un gruppo triplamente fattorizzato da tre sottogruppi localmente supersolubili A, B e C. Si supponga inoltre che C abbia rango sezionale finito e che il sottogruppo derivato G' di G sia localmente nilpotente. Allora G è localmente supersolubile.

Più in generale, togliendo l'ipotesi della normalità, sono stati dimostrati numerosi risultati riguardanti la struttura di gruppi triplamente fattorizzati della forma

$$G = AB = AC = BC,$$

a partire dalla struttura dei sottogruppi A, B e C di G.

Una *formazione* è una classe $\mathfrak{F}$ di gruppi finiti che gode delle seguenti proprietà:

- Ogni immagine omomorfa di un $\mathfrak{F}$-gruppo è un $\mathfrak{F}$-gruppo.
- Se G/N e G/M sono $\mathfrak{F}$-gruppi, allora anche $G/(N \cap M)$ è un $\mathfrak{F}$-gruppo.

Una formazione $\mathfrak{F}$ si dice *saturata* se il gruppo finito G appartiene ad $\mathfrak{F}$ se il gruppo quoziente $G/\Phi(G)$ appartiene ad $\mathfrak{F}$, dove $\Phi(G)$ è il sottogruppi di Frattini di G.

Teorema 1.3.3 (F.G. Peterson, 1973) *Sia $\mathfrak{F}$ una formazione saturata contenente tutti i gruppi nilpotenti finiti e sia*

$$G = AB = AC = BC$$

un gruppo finito fattorizzato da due sottogruppi nilpotenti A e B e da un $\mathfrak{F}$-sottogruppo C. Allora G è un $\mathfrak{F}$-gruppo.

Poichè le classi dei gruppi finiti nilpotenti e dei gruppi finiti supersolubili sono formazioni saturate, il teorema precedente ammette il seguente corollario.

Corollario 1.3.4 *Sia*

$$G = AB = AC = BC$$

un gruppo finito fattorizzato da due sottogruppi nilpotenti A e B e da un sottogruppo C.

- *Se C è nilpotente, allora G è nilpotente.*
- *Se C è supersolubile, allora G è supersolubile.*

F.G. Peterson ha anche prodotto il controesempio seguente, provando che l'ipotesi di nilpotenza non può essere omessa nemmeno su uno solo tra i sottogruppi A e B.

Esempio 1.3.5 (F.G. Peterson, 1973) *Sia*

$$H = \langle x \rangle \times \langle y \rangle$$

un gruppo abeliano elementare di ordine 25. Siano a e b gli automorfismi di H definiti come segue

$$x^a = x^2,\ y^a = y^3,\ x^b = y,\ y^a = x.$$

Allora $A = \langle a, b \rangle$ è un gruppo diedrale di ordine 8. Si consideri il prodotto semidiretto

$$G = A \ltimes H$$

e si pongano

$$B = \langle a, H \rangle \text{ e } C = \langle b, H \rangle;$$

pertanto risulta

$$G = AB = AC = BC,$$

con A nilpotente e B e C supersolubili. Si osservi che il sottogruppo derivato

$$G' = \langle a^2, H \rangle$$

di G non è nilpotente, da cui segue in particolare che G non è supersolubile.

Pertanto, un gruppo finito triplamente fattorizzato da due sottogruppi supersolubili ed un sottogruppo nilpotente non è in generale supersolubile. Risultati parziali, che vanno nella direzione indicata, si ottengono facendo alcune considerazioni sul derivato del gruppo. E' infatti possibile provare che ogni gruppo finito

$$G = AB = AC = BC$$

triplamente fattorizzato da sottogruppi supersolubili, che abbia il sottogruppo derivato G' nilpotente, è supersolubile. La dimostrazione sfrutta il seguente risultato di R. Baer.

Teorema 1.3.6 *Sia G un gruppo finito con derivato nilpotente. Allora ogni collezione di sottogruppi normali supersolubili di G genera un sottogruppo supersolubile.*

Capitolo 2

Gruppi dotati di una tripla fattorizzazione abeliana

2.1 Costruzione di gruppi triplamente fattorizzati

La situazione è molto piú complessa nel caso di gruppi infiniti triplamente fattorizzati. Esiste una speciale e molto variegata classe di anelli, gli anelli radicali, che consentono di costruire gruppi dotati di una tripla fattorizzazione abeliana, come esposto nel seguito.

Sia R un anello commutativo. Si definiscano due operazioni nel prodotto cartesiano

$$S = R \ltimes \mathbb{Z}$$

come segue

$$(r, n) + (s, m) = (r + s, n + m),$$

$$(r,n)\cdot(s,m)=(mr+ns+rs,nm),$$

con $r,s\in R$ e $n,m\in\mathbb{Z}$. Si verifica facilmente che S è un anello commutativo, la cui unità è l'elemento $(0,1)$, dove R può essere identificato con l'ideale $\{(r,0)|r\in R\}$ di S. Inoltre, dall'isomorfismo tra l'anello quoziente S/R e $\mathbb{Z}$, segue che il radicale di Jacobson $Jac(S)$ di S è contenuto in R.

L'anello R si dice *radicale* se coincide col radicale di Jacobson $Jac(S)$ di S. Dalla caratterizzazione di

$$Jac(S)=\{s\in S|1+sinvertibile\},$$

segue che R è radicale se e solo se gli elementi della forma $1+r$, con $r\in R$, hanno inverso s in S, ossia $1=s(1+r)=s+rs$ da cui si ha che $s=1-rs$, con $rs\in R$, in quanto R è un ideale di S. Pertanto, l'anello R è radicale se e solo se per ogni suo elemento r, esiste un altro elemento $t=rs\in R$ tale che

$$r+t+rt=0.$$

Sia R un anello radicale. Si definisca in R un'operazione $\circ$ come segue:

$$a\circ b=a+b+ab,$$

con $a,b\in R$. La struttura

$$A=A(R)=(R,\circ)$$

è un gruppo, detto *gruppo associato* di R. Posto $K=K(R)$ il gruppo additivo di R, allora A agisce su R come segue:

$$x^a=(x\circ a)-a=x+xa,$$

per ogni elemento x di K e a di A. Si consideri il prodotto semidiretto

$$G(R) = A \ltimes K = \{(a,x)|a \in A, x \in K\},$$

e si identifichi A e K con i sottogruppi

$$\{(a,0)|a \in A\} \text{ e } \{(0,x)|x \in K\},$$

rispettivamente. Si ponga $B = B(R) = \{(a,a)|a \in A\}$. Pertanto risulta che

$$A \cap B = A \cap K = B \cap K = 1.$$

L'operazione di moltiplicazione in $G(R)$ è tale che

$$(a,x)(b,y) = (a+b+ab, x+y+xb),$$

da cui segue in particolare che

$$(a,a)(b,0) = (a+b+ab, a+ab).$$

Sia (o,x) un elemento di K e si ponga $b = -x$. Poichè R è un anello radicale, allora esiste $a \in R$ tale che $a+b+ab = 0$. Pertanto

$$(a,a)(b,0) = (a+b+ab, a+ab) = (0,-b) = (0,x).$$

Quindi, K è contenuto nel prodotto AB. Inoltre, se $(a,0)$ è un elemento di A, allora

$$(a,0) = (a,a)(0,-a)$$

e dunque A è contenuto nel prodotto BK. In definitiva, il gruppo $G(R)$ è dotato di una tripla fattorizzazione

$$G(R) = AB = AK = BK$$

e

$$A \cap B = A \cap K = B \cap K = 1,$$

con A, B e K sottogruppi abeliani e K normale in $G(R)$. Questa costruzione consente di ottenere gruppi dotati di una tripla fattorizzazione abeliana, verificanti le condizioni sopra descritte, a partire da un anello radicale R. Il lemma seguente stabilisce un viceversa a tale costruzione.

Lemma 2.1.1 *Sia*

$$G = AB = AK = BK$$

un gruppo triplamente fattorizzato da sottogruppi abeliani A, B e K, con $K \lhd G$, tali che $A \cap B = A \cap K = B \cap K = 1$. Allora esiste qualche anello radicale R tale che $G = G(R)$.

Y.P. Sysak ha prodotto un importante esempio che traccia dei confini ben precisi nello studio del caso infinito.

Teorema 2.1.2 (Y.P. Sysak, 1982) *Esiste un gruppo numerabile senza torsione G che gode delle seguenti proprietà:*

- *$G = AB = AK = BK$, dove A e B sono sottogruppi abeliani liberi e K è un sottogruppo normale abeliano di G con rango di Prufer uguale a 1.*
- *$A \cap B = A \cap K = B \cap K = 1$.*
- *$A_G = B_G = Z(G) = 1$.*
- *G non è localmente policiclico.*

Pertanto, dall'esempio di Sysak, segue che esistono gruppi triplamente fattorizzati da sottogruppi abeliani che non sono neanche localmente supersolubili.

2.2 Condizione generalizzata di nilpotenza nei gruppi triplamente fattorizzati da sottogruppi abeliani

D.J.S. Robinson e S. Stonehewer hanno provato tuttavia che i gruppi dotati di una tripla fattorizzazione abeliana godono di una proprietà dei gruppi nilpotenti, equivalente alla nilpotenza nel caso finito. Si ricordi che si dice che H/K è un *fattore principale* di un gruppo G se e solo se H/K è un sottogruppo normale minimale di G/K. Nella notazione usuale, i gruppi a fattori principali centrali sono definiti $\bar{Z}$-gruppi.

Teorema 2.2.1 (Robinson, Stonehewer, 1993) *Si consideri un gruppo*

$$G = AB = AC = BC$$

triplamente fattorizzato da sottogruppi abeliani A, B e C. Allora ogni fattore principale di G è centrale.

Il risultato precedente è in realtà una conseguenza immediata del seguente teorema.

Teorema 2.2.2 (Robinson, Stonehewer, 1993) *Sia*

$$G = AB$$

un gruppo fattorizzato da due sottogruppi abeliani A e B. Allora ogni fattore principale di G è centralizzato da A oppure da B.

DIMOSTRAZIONE. Sia il gruppo

$$G = AB$$

prodotto di due sottogruppi abeliani A e B. Chiaramente, occorre provare che se M è un sottogruppo normale minimale di G, allora M è centralizzato da A oppure da B. Inoltre, possiamo supporre che $A \cap B = 1$, in quanto altrimenti si può quozientare G con $A \cap B \leq Z(G)$. Si pongano

$$A_1 = A \cap BM \text{ e } B_1 = B \cap AM,$$

in modo che risulti

$$X(M) = A_1B_1 = A_1M = B_1M,$$

dove $X(M)$ è il fattorizzatore di M in G. Sia $N = G' = [A, B]$. Dal Teorema di Itô segue che N è abeliano e posto

$$A_2 = A \cap BN \text{ e } B_2 = B \cap AN,$$

risulta che

$$X(N) = A_2B_2 = A_2N = B_2N,$$

dove $X(N)$ è il fattorizzatore di N.

Se $M \cap N = 1$, allora

$$[G, M] \leq M \cap N = 1,$$

per cui M è centralizzato sia da A che da B. Pertanto si può assumere che $M \cap N \neq 1$ e quindi $M \leq N$, per la minimalità di M. Distinguiamo due casi.

Caso 1. Supponiamo che $[A_2, M] = 1$. Poichè B_1 è contenuto in A_1M, segue che

$$[A_2, B_1] \leq [A_2, A_1M] = [A_2, M] = 1.$$

Analogamente, da $N \leq A_2B_2$ segue che

$$[N, B_1] \leq [A_2B_2, B_1] = [A_2, B_1] = 1,$$

ossia $[A, B, B_1] = 1$. Poichè per ipotesi anche $[B, B_1, A] = 1$, dal Lemma dei tre sottogruppi ([11], Lemma 5.1.10) si ottiene che

$$[A, B_1, B] = 1, \text{ (1)}$$

da cui in particolare segue che $[A, B_1] \leq C_G(B)$

Distinguiamo due ulteriori casi. Se $[A, B_1] \neq 1$, allora da $M \geq [A, M] = [A, B_1]$ e dalla (1) segue che $C_M(B) \neq 1$. Poichè M è contenuto in N, allora $C_M(B) \lhd G$, da cui segue, per la minimalità di M, che $M = C_M(B)$, ossia che M è centralizzato da B. D'altra parte, se $[A, B_1] = 1$, allora $[A, M] = [A, MB_1] = [A, A_1B_1] = 1$, ossia M è centralizzato da A, il che completa la tesi nel primo caso.

Caso 2. Supponiamo che $[A_2, M] \neq 1$, per cui in particolare si ha che $[A_2, B_1] \neq 1$. Pertanto, esiste un elemento b_1 appartenente a B_1 che non centralizza A_2, ossia $[A_2, b_1] \neq 1$. Sia $a \in A$. Allora esiste un elemento $a_1 \in A_1$ tale che $a_1b_1 \in M$ e quindi

$$[a, b_1] = [a, a_1b_1] \in M. \text{ (2)}$$

Dall'arbitrarietà della scelta di $a \in A$, segue che

$$M \geq [A_2, b_1] = [A_2B_2, b_1] = [NB_2, b_1] = [N, b_1].$$

Poichè $N = G'$ è abeliano, risulta $[N, b_1] \lhd G$ e quindi, per la minimalità di M, risulta che

$$M = [N, b_1].$$

Dalla (2) segue che

$$[a, b_1] = [b_2 a_2, b_1] = [a_2, b_1],$$

con $a_2 \in A_2, b_2 \in B_2$ e $b_2 a_2 \in N$. Pertanto, risulta

$$a a_2^{-1} \in C_A(b_1) \leq C_A(M),$$

poichè $M = [A_2, b_1]$. Pertanto, $A = A_2 C_A(M)$. In maniera analoga, si ottiene che $B = B_2 C_B(M)$. Inoltre, posto $G_1 = A_2 B_2$, risulta che M è un sottogruppo normale minimale anche in G_1. Pertanto è sufficiente dimostrare che M è centralizzato da A_2 oppure da B_2. A meno di quozienti, si può supporre che

$$A_2 \cap N = B_2 \cap N = 1.$$

Pertanto, sono verificate le ipotesi del lemma precedente, per cui esiste un anello radicale R tale che

$$G(R) = A^\circ \ltimes K$$

con $A^\circ \simeq A_2$ e $K \simeq N$. Si noti che se $x_1 \in K$ e $x_2 \in A^\circ$, allora $x_1 \cdot x_2 = x_1 + x_1 x_2$. Se, per l'isomorfismo precedente, S in K corrisponde a M in N, allora S è un ideale minimale di K.

Supponiamo che $SR \neq 0$. Allora esiste un elemento $s \in S$ tale che

$$sR = S.$$

Poichè R è un anello radicale, esiste un elemento $s' \in S$ tale che $s + s' + ss' = 0$. Inoltre, $s' = sr$ per qualche $r \in R$, e quindi

$$s + s(r + sr) = 0.$$

Sia $r_1 = r + sr$, allora esiste un elemento r_1' R tale che $r_1 + r_1' + r_1 r_1' = 0$. D'altro canto, risulta

$$0 = (s + sr_1)r_1' = sr_1' + sr_1 r_1'$$

e quindi $sr_1 = 0$, cioè $s = 0$, che contraddice la scelta di s. Pertanto $SR = 0$ e quindi $M \leq Z(G_1)$, il che completa la tesi. ∎

Capitolo 3

Gruppi FC-ipercentrali triplamente fattorizzati

3.1 Gruppi FC-nilpotenti e FC-ipercentrali

Sia G un gruppo. Si definisce la *serie superiore FC-centrale* $\{F_\alpha\}_\alpha$ come segue:

$$F_0(G) = 1,\ \frac{F_{\alpha+1}}{F_\alpha(G)} \text{ è l'FC-centro di } G/F_\alpha(G)$$

e

$$F_\lambda(G) = \bigcup_{\beta<\lambda} F_\beta(G),$$

per ogni ordinale α e ordinale limite λ.

Un gruppo G è detto *FC-ipercentrale* se $G = F_\tau(G)$ per qualche ordinale τ, oppure, equivalentemente, se ogni immagine omomorfa non banale di G contiene qualche elemento non identico dotato di un numero finito di coniugati. In particolare, se τ è finito allora G è detto *FC-nilpotente*. Si osservi che $F_1(G) = F(G)$ è l'FC-centro di G, ossia il sottogruppo costituito da tutti gli elementi di G dotati di un numero finito di coniugati, detti FC-elementi.

Verranno richiamati alcuni risultati concernenti i gruppi FC-ipercentrali e FC-nilpotenti, che saranno utilizzati in seguito.

Lemma 3.1.1 *Ogni gruppo finitamente generato FC-nilpotente G è policiclico-per-finito.*

DIMOSTRAZIONE. Si ragioni per induzione sulla lunghezza dell'FC-serie centrale superiore di G. Per ipotesi induttiva, si supponga che il gruppo quoziente

$$\frac{G}{F_1(G)}$$

sia policiclico-per-finito, da cui segue in particolare che $G/F_1(G)$ è finitamente presentato e dunque $F_1(G)$ è la chiusura normale di un sottoinsieme finito di G ([10], Lemma 1.43). Poichè $F_1(G)$ è costituito da FC-elementi, allora è $F_1(G)$ è un FC-gruppo finitamente generato e dunque è centrale-per-finito ([7], Teorema 1.3). Pertanto G è poli(ciclico o finito) e quindi è anche policiclico-per-finito. ■

Teorema 3.1.2 (McLain, 1956) *Ogni gruppo FC-ipercentrale finitamente generato G è nilpotente-per-finito.*

DIMOSTRAZIONE. Sia α il minimo ordinale tale che il gruppo quoziente

$$\frac{G}{F_\alpha(G)}$$

sia FC-nilpotente e si supponga $\alpha > 0$. Se α non è ordinale limite, allora $F_\alpha/F_{\alpha-1}(G)$ è l'FC-centro di $G/F_{\alpha-1}(G)$ e quindi

$$\frac{G}{F_{\alpha-1}(G)}$$

è FC-nilpotente, il che è assurdo per la minimalità di α. Pertanto, α è un ordinale limite, ossia

$$F_\alpha(G) = \bigcup_{\beta<\alpha} F_\beta(G).$$

Dal lemma precedente segue che $G/F_\alpha(G)$ è policiclico-per-finito e dunque $F_\alpha(G)$ è la chiusura normale di un sottoinsieme finito di G. Pertanto, esiste un ordinale $\beta < \alpha$ tale che

$$F_\alpha(G) = F_\beta(G),$$

il che contraddice la scelta di α. Le contraddizioni scaturiscono dall'aver supposto $\alpha > 0$. In definitiva, G è gruppo FC-nilpotente e

$$G = F_c(G)$$

per qualche intero positivo c. Nuovamente, dal lemma precedente segue che G è policiclico-per-finito; inoltre, ogni quoziente

$$\frac{F_{i+1}}{F_i(G)}$$

è finitamente generato e quindi il gruppo quoziente

$$\frac{G}{C_G\left(\frac{F_{i+1}(G)}{F_i(G)}\right)}$$

è finito, per ogni $i < c-1$. D'altro canto, l'intersezione

$$\bigcap_{i=0}^{c-1} C_G\left(\frac{F_{i+1}(G)}{F_i(G)}\right)$$

costituisce un sottogruppo normale nilpotente di G e quindi G è nilpotente-per-finito. ■

Corollario 3.1.3 *(i) Ogni gruppo FC-ipercentrale è localmente FC-nilpotente.*
(ii) Un gruppo è localmente FC-nilpotente se e solo se è localmente nilpotente-per-finito.

3.2 Gruppi FC-nilpotenti triplamente fattorizzati

Si ricordi che un gruppo G è detto *ipercentrale* se ogni immagine omomorfa non banale di G ha centro non identico. Inoltre, ogni gruppo FC-nilpotente è localmente nilpotente se e solo se è ipercentrale. Analogamente, un gruppo G è detto *iperciclico* se e solo se ogni immagine omomorfa non banale di G contiene qualche sottogruppo ciclico normale non banale; si osservi che ogni gruppo FC-ipercentrale è localmente supersolubile se e solo se è iperciclico. Si ricordi inoltre che un sottogruppo normale N di un gruppo G è detto iperciclicamente immerso in G se è dotato di una serie ascendente a fattori ciclici costituita da sottogruppi normali in G.

Un rilevante teorema dovuto a P. Hall asserisce che se G è un gruppo contenente un sottogruppo normale nilpotente N tale che il gruppo quoziente G/N' è nilpotente, allora G stesso è nilpotente ([10], Parte 1, Teorema 2.27). Il teorema di P. Hall è applicato più in generale a gruppi con molte altre proprietà teoretiche e non solo nel caso di nilpotenza.

Teorema 3.2.1 *Sia il gruppo FC-nilpotente*

$$G = AB = AK = BK$$

prodotto di due sottogruppi ipercentrali A e B e di un sottogruppo normale nilpotente K. Allora G è ipercentrale.

DIMOSTRAZIONE. Se G/K' è ipercentrale, allora tale è anche G (Hall). Pertanto, a meno di rimpiazzare G con G/K', si può supporre che K sia abeliano. Poichè G è localmente policiclico ([2], Lemma 2.1), pertanto è possibile considerare il sottogruppo T costituito dagli elementi periodici di G ([13], Teorema 9). Inoltre, G/T è nilpotente ([2], Corollario 2.5). Per assurdo, si supponga la tesi falsa e si scelga un controesempio G per il quale è minima la lunghezza della FC-serie centrale superiore. Detto F l'FC-centro di G, allora il gruppo quoziente

$$\frac{G}{F}$$

è ipercentrale. Posto

$$H = F \cap T \cap K,$$

risulta che H è un sottogruppo normale abeliano periodico contenuto nell'FC-centro di G tale che

$$\frac{G}{H}$$

è ipercentrale. Si osservi che esiste un primo p tale che la p-componente H_p di H non è contenuta nell'ipercentro di G. Pertanto, il gruppo quoziente G/H_p è esso stesso un controesempio minimo e dunque, senza ledere la generalità, si può supporre che H sia un p-gruppo. Risulta che

$$H = H_1 \times H_2,$$

dove H_1 e H_2 sono due sottogruppi normali di G tali che ogni G-fattore principale di H_1 sia centrale e nessun G-fattore principale di H_2 sia centrale ([13], Lemma 2.1). Poichè G/H_1 è ancora un controesempio minimo, si può supporre che nessun G-fattore principale di H sia centrale. Poichè H è costituito da FC-elementi, allora contiene un sottogruppo normale minimale finito N. Sia M un sottogruppo G-invariante di H che sia massimale rispetto alla condizione $M \cap N = 1$. Allora

$$\frac{G}{M}$$

è anch'esso un controesempio e quindi si può supporre che N è contenuto in ogni sottogruppo non banale G-invariante di H. Se $C = C_G(N)$, allora il gruppo quoziente G/C è finito ed è dotato di una tripla fattorizzazione nilpotente, ossia è nilpotente (Corollario 1.3.4). Sia P/C il p-sottogruppo di Sylow di G/C. Allora da $[N, P] < N$ segue che $[N, P] = 1$ e dunque $P = C$. Inoltre, G/P è un p'-gruppo. Sia E un sottogruppo finito non banale G-invariante di H. Allora N è contenuto in E e quindi

$$C_G(E) \leq C.$$

Il gruppo finito $G/C_G(E)$ è dotato di una tripla fattorizzazione nilpotente e dunque è esso stesso nilpotente. Sia $S/C_G(E)$ la p'-componente del gruppo abeliano

$$\left(\frac{C}{C_G(E)}\right) \bigcap \left(Z\left(\frac{G}{C_G(E)}\right)\right).$$

Allora

$$E = C_E(S) \times [E, S]$$

dove i sottogruppi $C_E(S)$ e $[E, S]$ sono normali in G. Poichè $N \leq C_E(S)$, risulta che

$$[E, S] = 1$$

e quindi $S = C_G(E)$. Inoltre

$$\left(\frac{C}{C_G(E)}\right) \bigcap \left(Z\left(\frac{G}{C_G(E)}\right)\right)$$

è un p-gruppo e dunque tale è anche $C/C_G(E)$. Pertanto, C agisce nilpotentemente su E. Poichè si può ricoprire H con i suoi sottogruppi finiti G-invarianti, allora H è iperciclicamente immerso in C. Allora G spezza su H ([13], Lemma 2.3). Sia L un sottogruppo di G tale che $G = L \times H$. Allora

$$K = (L \cap K) \times H$$

con $L \cap H$ normale in $G = LK$. Si consideri il gruppo quoziente

$$\bar{G} = \frac{G}{(L \cap K)}.$$

Allora $\bar{K} = \bar{H}$ è contenuto nell'FC-centro di $\bar{G}$ e dunque $\bar{G}$ è ipercentrale ([2], Lemma 2.2), da cui segue che G è ipercentrale.

L'assurdo completa la tesi. ■

3.3 Gruppi FC-ipercentrali triplamente fattorizzati

Nel 1996, B. Amberg e Y.P. Sysak hanno provato il seguente teorema nel caso in cui il gruppo sia FC-ipercentrale.

Teorema 3.3.1 (Amberg, Sysak, 1996) *Si consideri il gruppo FC-ipercentrale*

$$G = AB = AK = BK$$

prodotto di tre sottogruppi ipercentrali A, B e K, con K normale in G. Allora G è ipercentrale.

Si osservi che nella dimostrazione non è richiesta alcuna ipotesi sul derivato del gruppo, che spesso costituisce il vero problema nello studio dei prodotti di gruppi.

Il teorema precedente è una immediata conseguenza del seguente risultato.

Teorema 3.3.2 (Amberg, Sysak, 1996) *Sia il gruppo*

$$G = AB = AM = BM$$

prodotto di tre sottogruppi localmente nilpotenti A, B *e* M*, con* M *normale in* G*. Se* M *è dotato di una serie* G*-invariante a fattori minimax, allora* G *è localmente nilpotente.*

Capitolo 4

Gruppi FC-ipercentrali dotati di una tripla fattorizzazione localmente supersolubile

4.1 Prerequisito

E' noto che il prodotto di sottogruppi normali che siano supersolubili, localmente supersolubili o iperciclici, non costituisce in generale un sottogruppo rispettivamente supersolubile, localmente supersolubile o iperciclico. Il seguente utile lemma delinea una caso particolare in cui il risultato vale.

Lemma 4.1.1 *Sia G un gruppo tale che il sottogruppo derivato G' sia localmente nilpotente e siano H e K sottogruppi normali di G.*

- *Se H e K sono supersolubili allora HK è supersolubile.*

- *Se H e K sono localmente supersolubili allora HK è localmente supersolubile.*
- *Se H e K sono iperciclici allora HK è iperciclico.*

4.2 Teorema principale e casi particolari

L'obiettivo del capitolo e della tesi è lo studio dei gruppi FC-ipercentrali dotati di una tripla fattorizzazione localmente supersolubile ed in particolare sotto quali ipotesi il gruppo stesso eredita la proprietà della locale supersolubilità. Come anticipato, l'ostacolo principale è individuato nel comportamento del sottogruppo derivato.

Il prossimo lemma dimostra un caso particolare del teorema principale esposto in seguito.

Lemma 4.2.1 *Sia $G = AB = AK = BK$ un gruppo FC-ipercentrale fattorizzato da due sottogruppi abeliani A e B e da un sottogruppo normale localmente supersolubile K. Allora G è localmente supersolubile.*

DIMOSTRAZIONE. Per assurdo si supponga che G non sia localmente supersolubile, ossia che G sia privo di sottogruppi normali ciclici non identici. Dall'ipotesi segue che l'FC-centro F di G non è identico ed in quanto tale ha intersezione non identica con ogni sottogruppo normale di G. Si consideri l'elemento

$$u \in F \cap K$$

e sia

$$M = \langle u \rangle^G$$

la sua chiusura normale in G. Pertanto il sottogruppo finitamente generato M di G è nilpotente-per-finito (Teorema 3.1.2), da cui segue che il suo sottogruppo di Fitting

$$M^* = FitM$$

è nilpotente.

Si supponga preliminarmente che M sia finito; allora M contiene un sottogruppo N normale minimale in G. Analogamente, N contiene un FC-elemento u' non unitario e dalla minimalità della scelta di N rispetto alla condizione di normalità in G segue che

$$N = \langle u' \rangle^G.$$

Pertanto, a meno di sostituzioni, si può supporre che M sia un sottogruppo normale minimale di G. Senza ledere la generalità, si supponga per il Teorema 2.2.2 che M sia centralizzato da A. Poichè K è localmente supersolubile, allora esiste un elemento $k \in K \cap M$ tale che

$$\langle k \rangle \lhd K.$$

Dall'ipotesi di minimalità di M segue che

$$M = \langle k \rangle^G = \langle k \rangle^{AK} = \langle k \rangle^K = \langle k \rangle,$$

il che è assurdo.

Si supponga dunque che M sia infinito. Allora M^* è infinito, avendo indice finito in M, ed è normale in G, in quanto caratteristico in M. In maniera analoga al ragionamento fatto per la costruzione di M, si può considerare la chiusura normale in G di un FC-elemento di M^*, che risulta essere nilpotente. Pertanto, si può supporre che M sia nilpotente. Inoltre, essendo M finitamente generato, risulta essere policiclico e dunque ha un sottogruppo $\overline{M}$ poli-(ciclico infinito) normale e di indice finito ([11], Teorema 5.4.15i). Sia

$$n = |M : \overline{M}|;$$

allora M^n è un sottogruppo caratteristico poli-(ciclico infinito) di indice finito in M e quindi normale in G.

Pertanto, senza ledere la generalità, è possibile supporre che M sia senza torsione.

In definitiva, M è un sottogruppo normale in G, nilpotente, finitamente generato e senza torsione. Tra tutti i controesempi, si scelga G in modo che M abbia rango senza torsione minimo.

Sia p un numero primo; allora il p-gruppo

$$\frac{M}{M^p}$$

è finito, poichè è nilpotente, finitamente generato e con esponente finito. Allo scopo di provare che M/M^p non è identico, sia M' il sottogruppo derivato di M e si osservi che il gruppo abeliano finitamente generato M/M' non è di torsione, poichè M è nilpotente e senza torsione; pertanto, M/M' ha un quoziente ciclico infinito e dunque si può considerare anche un quoziente M/N di ordine p. Risulta allora che

$$M^p \leq N < M$$

e quindi $M/M^p \neq 1$. Pertanto, il p-gruppo finito non identico M/M^p possiede un sottogruppo

$$\frac{M(p)}{M^p}$$

massimale rispetto alla condizione $M(p) \lhd G$.

Applicando il Teorema 2.2.2 al fattore principale $M/M(p)$ di G, si ottiene che esso è centralizzato da A oppure da B. Senza ledere la generalità, si può supporre che esiste un insieme infinito π di numeri primi tali che $M/M(q)$ è centralizzato da A per ogni primo $q \in \pi$, ossia

$$[A, M] \leq M(q)$$

per ogni $q \in \pi$.

Si consideri il sottogruppo

$$N = \bigcap_{q \in \pi} M(q),$$

normale in G. Se, per assurdo, N ha indice finito in M, allora risulta che

$$q / \left| \frac{M}{N} \right|$$

per ogni $q \in \pi$, che è una contraddizione. Pertanto risulta che

$$|M : N| = \infty.$$

Inoltre, M/N non è di torsione e dunque $N = 1$ per la minimalità del rango senza torsione di M. Pertanto si ottiene che

$$[A, M] = 1,$$

ossia che M è centralizzato da A, il che completa la tesi. ■

Lemma 4.2.2 *Sia G un gruppo a fattori principali centrali e sia A un sottogruppo normale abeliano finitamente generato senza torsione di G. Allora A è contenuto in $Z_r(G)$ per qualche numero intero non negativo r.*

DIMOSTRAZIONE. Sia r il rango di A e sia p un numero primo. Allora risulta che

$$\left|\frac{A}{A^p}\right| = p^r$$

Pertanto ogni G-serie principale del gruppo finito A/A^p ha esattamente r fattori, perchè essi sono centrali per ipotesi e dunque di ordine primo. Risulta quindi che

$$[A, G, ..., G] \leq A^p$$

per ogni numero primo p. Essendo

$$\bigcap_{p \in \mathbb{P}} A^p = \{1\},$$

si ottiene allora che

$$[A, G, ..., G] = \{1\},$$

ossia $A \leq Z_r(G)$. ■

Lemma 4.2.3 *Sia G un gruppo FC-ipercentrale a fattori principali centrali. Allora G è ipercentrale.*

DIMOSTRAZIONE. Poichè le ipotesi sono ereditate dalle immagini omomorfe di G, allo scopo di provare che il gruppo G è ipercentrale, è sufficiente dimostrare che il suo centro $Z(G)$ non è identico, a meno del caso banale. Sia $u \neq 1$ un elemento dell'FC-centro di G. Se l'elemento u è periodico, allora la chiusura normale

$$\langle u \rangle^G$$

di u in G è finita ([7], Teorema 1.4); pertanto ogni sottogruppo U di $\langle u \rangle^G$ che sia normale minimale in G è centrale e dunque il centro di G non è identico. Si supponga infine che l'elemento u sia aperiodico e sia

$$A = \langle u \rangle^G.$$

Allora $Z(A)$ ha indice finito in A ([7], Teorema 1.3) e dunque contiene elementi aperiodici. Risulta che

$$Z(A) = B \times C$$

con B senza torsione e C finito di ordine n. Allora

$$Z(A)^n = B^n$$

è un sottogruppo senza torsione, normale in G e finitamente generato, poichè ha indice finito in A. Pertanto, G possiede un sottogruppo abeliano senza torsione finitamente generato che, per il lemma precedente, è contenuto in $Z_r(G)$ per qualche intero non negativo r.

Quindi il centro $Z(G)$ di G non è identico e la tesi è provata. ∎

Un'altra applicazione del criterio di P.Hall, esposto nel capitolo precedente, permette di restringere la nostra attenzione al caso di gruppi metabeliani.

Lemma 4.2.4 *Sia G un gruppo e sia N un sottogruppo normale nilpotente di G. Se il gruppo quoziente G/N' è localmente supersolubile, allora G è localmente supersolubile.*

Il prossimo teorema costituisce il risultato principale di questo lavoro. Si osservi come sia stato necessario aggiungere l'ipotesi di nilpotenza del sottogruppo derivato. Si noti inoltre che ogni gruppo G è dotato del massimo sottogruppo iperciclicamente immerso H, che è ovviamente caratteristico, e risulta che G è localmente supersolubile se e solo se G/H ha la stessa proprietà.

Teorema 4.2.5 *Sia $G = AB = AC = BC$ un gruppo FC-ipercentrale fattorizzato da tre sottogruppi localmente supersolubili A, B e C. Se il derivato G' di G è nilpotente, allora G è localmente supersolubile.*

DIMOSTRAZIONE. Se il gruppo quoziente G/G'' è localmente supersolubile, allora vale la tesi per il Lemma 4.2.4. Pertanto, senza ledere la generalità, si può supporre che G sia metabeliano.

Si consideri il massimo sottogruppo normale iperciclicamente immerso N di AG'. Poichè N è un sottogruppo caratteristico di AG', allora

$$N \lhd G$$

.

Pertanto è possibile considerare il gruppo quoziente

$$\bar{G} = \frac{G}{N} = \bar{A}\bar{B} = \bar{A}\bar{C} = \bar{B}\bar{C}.$$

Allo scopo di provare che il sottogruppo $\bar{A} = AN/N$ di $\bar{G}$ è abeliano, si osservi che essendo A iperciclicamente immerso in AG' per ipotesi, allora il sottogruppo normale $A \cap G'$ di AG' è iperciclicamente immerso in AG' e dunque è contenuto in N. Pertanto, essendo

$$\bar{A} = \frac{AN}{N} \simeq \frac{A}{A \cap N}$$

un quoziente del gruppo abeliano

$$\frac{A}{A \cap G'} \simeq \frac{AG'}{G'},$$

risulta che $\bar{A}$ è abeliano.

Analogamente, si consideri il massimo sottogruppo normale iperciclicamente immerso $\bar{L}$ di $\bar{B}\bar{G}'$. Allora

$$\bar{L} \lhd \bar{G}$$

ed il gruppo quoziente

$$\hat{G} = \frac{\bar{G}}{\bar{L}} = \hat{A}\hat{B} = \hat{A}\hat{C} = \hat{B}\hat{C}$$

è fattorizzato da due sottogruppi abeliani $\hat{A}$ e $\hat{B}$ e da un sottogruppo localmente supersolubile $\hat{C}$.

Si consideri il massimo sottogruppo normale iperciclicamente immerso $\hat{M}$ di $\hat{C}\hat{G}'$. Allora

$$\hat{M} \lhd \hat{G}$$

ed il gruppo quoziente

$$\tilde{G} = \frac{\hat{G}}{\hat{M}} = \tilde{A}\tilde{B} = \tilde{A}\tilde{C} = \tilde{B}\tilde{C}$$

è fattorizzato da tre sottogruppi abeliani $\tilde{A}$, $\tilde{B}$ e $\tilde{C}$.

Per il Teorema 2.2.2, i fattori principali del gruppo FC-ipercentrale $\tilde{G}$ sono centralizzati da almeno due tra i sottogruppi $\tilde{A}$, $\tilde{B}$ e $\tilde{C}$ e dunque sono centrali.

Poichè il gruppo FC-ipercentrale $\tilde{G}$ è a fattori principali centrali, allora è ipercentrale per il Lemma 4.2.3; pertanto il sottogruppo normale $\hat{C}\hat{G}'$ di $\hat{G}$ è localmente supersolubile. Dal Lemma 4.2.1 segue che $\hat{G}$ è localmente supersolubile e dunque anche

$$\bar{B}\bar{G}'$$

è localmente supersolubile.

Analogamente, si consideri il quoziente G^* di $\bar{G}$ rispetto al massimo sottogruppo normale iperciclicamente immerso $\bar{M}$ di $\bar{C}\bar{G}'$ e poi si quozienti G^* rispetto al massimo sottogruppo normale iperciclicamente immerso L^* di $B^*G'^*$. Con ragionamenti simili, si ottiene che il sottogruppo

$$\bar{C}\bar{G}'$$

di $\bar{G}$ è localmente supersolubile.

Allora, essendo $\bar{G}'$ abeliano, il gruppo metabeliano

$$\bar{G} = \bar{B}\bar{G}' = \bar{C}\bar{G}'$$

è prodotto di sottogruppi normali ed localmente supersolubili ed è dunque localmente supersolubile, per il Lemma 4.1.1.

Risulta in definitiva che il sottogruppo

$$AG'$$

di G è localmente supersolubile.

Ripetendo la dimostrazione, considerando dapprima il quoziente di G rispetto al massimo sottogruppo normale iperciclicamente immerso L di BG', si ottiene con ragionamenti analoghi che il sottogruppo

$$BG'$$

è localmente supersolubile.

In definitiva, il gruppo metabeliano

$$G = (AG')(BG')$$

è prodotto di due sottogruppi normali localmente supersolubili AG' e BG'. Pertanto, dal Lemma 4.1.1, segue che G è localmente supersolubile.

$\blacksquare$

Bibliografia

[1] B. AMBERG - S. FRANCIOSI - F. DE GIOVANNI: *Products of Groups*, Clarendon Press, Oxford (1992).

[2] B. AMBERG - S. FRANCIOSI - F. DE GIOVANNI: *FC-nilpotent products of hypercentral groups*, Forum Math. 7 (1995), 307–316.

[3] B. AMBERG - Y.P. SYSAK: *On groups with a locally nilpotent triple factorization*, Publ. Math. Debrecen 49/3-4 (1996), 359–365.

[4] A. AULETTA - F. DE GIOVANNI: *Products of locally supersoluble groups*, Note di Matematica, in corso di stampa.

[5] R. BAER: *Classes of finite groups and their properties*, Illinois J. Math. 1 (1957), 115–187.

[6] S. FRANCIOSI - F. DE GIOVANNI: *Triple factorizations by locally supersoluble groups*, Siberian Math. J. 38 (1997), 380–388.

[7] F. DE GIOVANNI - F. CATINO: *Alcuni aspetti della teoria dei gruppi con classi di coniugio finite*, Quaderni di Matematica dell'Università di Lecce 2, 2010.

[8] O.H. KEGEL: *Zur Struktur mehrfach faktorisierter endlicher Gruppen*, Math. Z. 87 (1965), 42–48.

[9] D.H. McLain: *Remarks on the upper central series of a group*, Proc. Glasgow Math. Assoc. 3 (1956), 38–44.

[10] D.J.S. Robinson: *Finiteness Conditions and Generalized Soluble Groups*, Springer, Berlin, 1972.

[11] D.J.S. Robinson: *A course in the Theory of Groups*, 2nd ed., Springer, New York, 1995.

[12] D.J.S. Robinson - S.E. Stonehewer: *Triple factorizations by abelian groups*, Arch. Math. (Basel) 60 (223-232), 1993.

[13] M.J. Tomkinson: *FC-nilpotent groups and a Frattini-like subgroup*, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova 88 (201-210), 1992.